

Markow - Ketten III

Der Erneuerungssatz

5. September 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Markoff Ketten allgemein	3
1.1	Warum brauchen wir den Erneuerungssatz?	3
1.2	Das Ehrenfests Modell der Wärmebewegung	4
2	Zustandseigenschaften	7
2.1	Periode	8
2.2	Kommunizieren	8
2.3	Rekurrenz und Transienz	9
3	Die Erneuerungsgleichung	10
3.1	Das Rückkehrverhalten	10
3.2	Die Erneuerungsgleichung	11
4	Der Erneuerungssatz	13
4.1	Das Glühbirnenbeispiel	15
4.2	Der Teilchenzähler	16
4.3	Ampelphasen	17
5	Anwendung auf Übergangswahrscheinlichkeiten	20
5.1	Bestimmung der Grenzwerte von Ehrenfests Modell . . .	21
6	Anwendungen im Mathematikunterricht	22
6.1	Geschichtlicher Hintergrund zum Erneuerungssatz	22
6.2	Unser Fazit für den konkreten Einsatz im Mathematikun- terricht	22

Kapitel 1

Einleitung: Markoff Ketten allgemein

1.1 Warum brauchen wir den Erneuerungssatz?

Auf der Suche nach den Grenzwerten der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$ ist uns bisher das sogenannte Spaltenkriterium begegnet. Dieses besagt, dass, wenn die Übergangsmatrix $(p_{ij}^{(L)})$ für ein $L \geq 1$ nur strikt positive Elemente hat, die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen von i unabhängige Zahlen p_j konvergieren. Der Vektor $p = (p_j)$ ist der eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsvektor, der das Gleichungssystem $p_k = \sum_{j \in I} p_j \cdot p_{jk}$ löst.

Diese hinreichende Bedingung für die Konvergenz ist allerdings - wie das Einführungsbeispiel ‘Ehrenfests Modell der Wärmebewegung‘ zeigen wird - zu speziell, um alle interessanten Fälle zu erfassen. Mit Hilfe des Erneuerungssatzes können wir Aussagen über das Konvergenzverhalten der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ treffen. Die Idee der Erneuerung gehört zu den fruchtbarsten Ideen der Wahrscheinlichkeitstheorie.

1.2 Das Ehrenfests Modell der Wärmebewegung

Das Ehrenfests Modell der Wärmebewegung ist bekannt aus der Physik und wird im Folgenden veranschaulicht:

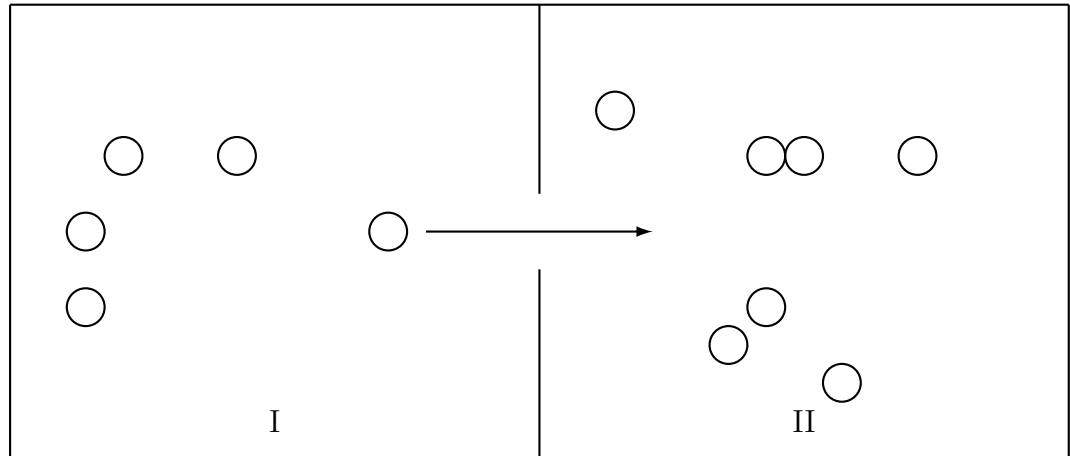
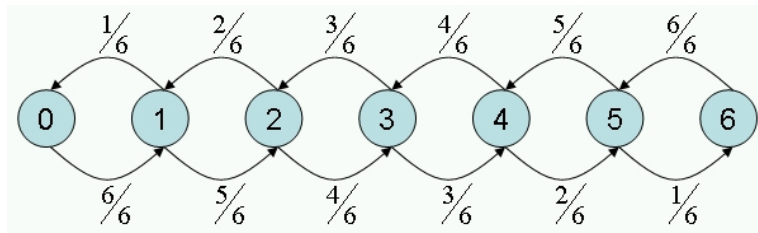


Abbildung 1: Ehrenfests Modell der Wärmebewegung

Ein Behälter ist in zwei Teile I und II geteilt, zwischen denen wie in Abbildung 1 eine kleine Öffnung existiert. Insgesamt enthält der Behälter N Gasmoleküle. Durch die Wärmebewegung können Moleküle aus dem Bereich I in den Bereich II gelangen oder umgekehrt. Der Zustand des Systems ist durch die Anzahl i der Moleküle in Bereich I beschrieben. Für jedes Molekül soll es gleich wahrscheinlich sein, dass es als Nächstes durch die Öffnung fliegt.

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden den Fall mit $N = 6$ Gasmolekülen. Es gibt dann also sieben Zustände und man erhält das folgende Übergangsdiagramm:

Übergangsdiagramm 1



Die Übergangsmatrix hat die folgende Form:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{6} & 0 & \frac{4}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & 0 & \frac{2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wenn man nun versucht, das Spaltenkriterium auf die Übergangsmatrix P anzuwenden, erkennt man schnell, dass keine Potenz der Übergangsmatrix in einer Spalte nur strikt positive Elemente hat.

Gerade Potenzen (für große n) haben die Form:

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 0,03125 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,03125 \\ 0 & 0,1875 & 0 & 0,625 & 0 & 0,1875 & 0 \\ 0,03125 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,03125 \\ 0 & 0,1875 & 0 & 0,625 & 0 & 0,1875 & 0 \\ 0,03125 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,03125 \\ 0 & 0,1875 & 0 & 0,625 & 0 & 0,1875 & 0 \\ 0,03125 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,03125 \end{pmatrix}$$

Ungerade Potenzen (für große n) haben die Form:

$$P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0,1875 & 0 & 0,625 & 0 & 0,1875 & 0 \\ 0,03125 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,03125 \\ 0 & 0,1875 & 0 & 0,625 & 0 & 0,1875 & 0 \\ 0,03125 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,03125 \\ 0 & 0,1875 & 0 & 0,625 & 0 & 0,1875 & 0 \\ 0,03125 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,46875 & 0 & 0,03125 \\ 0 & 0,1875 & 0 & 0,625 & 0 & 0,1875 & 0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt allerdings auch, dass für große n eine gewisse Regelmäßigkeit bei den Einträgen der Übergangsmatrix zu erkennen ist. Die Frage, die sich jetzt stellt, ist, wie man diese Einträge berechnen kann, und ob sie uns Erkenntnisse für unser Konvergenzproblem liefern.

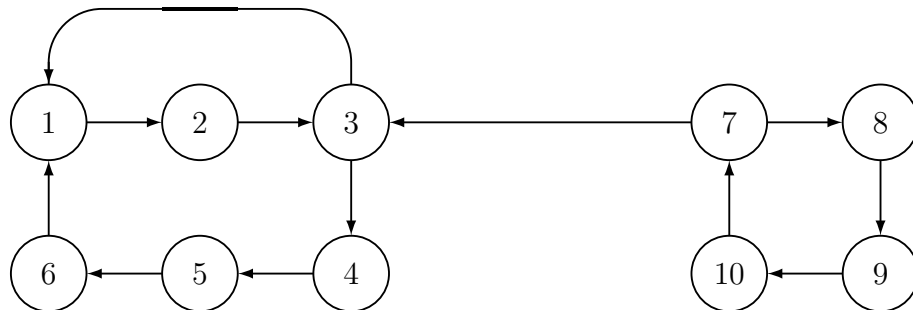
Dieses Problem führt uns zum Erneuerungssatz.

Kapitel 2

Zustandseigenschaften

Um den Erneuerungssatz einzuführen, benötigen wir noch einige technische Hilfsmittel.

Im weiteren Verlauf beziehen sich alle Beispiele auf das folgende Zustandsdiagramm.



Übergangsdigramm 2

2.1 Periode

Definition 1: Periode

Für einen Zustand i mit $i \rightarrow j$ heißt der größte gemeinsame Teiler der potenziellen Rückkehrzeiten

$$d_i = \text{ggT}\{n \geq 1 : i \rightarrow i[n]\}$$

die **Periode** von i .

Beispiele

$$d_1 = d_2 = \dots = d_6 = 3$$

$$d_7 = d_8 = d_9 = d_{10} = 4$$

Satz 1:

Zu jedem $j \in C(i)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl r_j mit $0 \leq r_j < d_i$ derart, dass $i \rightarrow j[n]$ nur für Zahlen $n \equiv r_j \pmod{d_i}$ gilt, aber für hinreichend großes $n \geq N(j)$ auch für alle diese n .

Beweis:

Siehe Krengel §16, Satz 16.7, Seite 209

2.2 Kommunizieren

Definition 2: Zustand i führt in Zustand j

Wir sagen, Zustand i führe in n Schritten zu Zustand j und schreiben dafür $i \rightarrow j[n]$, wenn $p_{ij}^{(n)} > 0$ ist. Gibt es ein $n \geq 1$ mit $i \rightarrow j[n]$, so sagen wir i führe zu j und schreiben $i \rightarrow j$.

Definition 3: Kommunizieren

Wir sagen, i kommuniziere mit j , und schreiben dafür $i \leftrightarrow j$, wenn $i \rightarrow j$ und $j \rightarrow i$.

Definition 4: Menge der kommunizierenden Zustände

$C(i)$ bezeichnet die mit i kommunizierenden Zustände.

Beispiele

$$C(1) = C(2) = \dots = C(6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C(7) = C(8) = C(9) = C(10) = \{7, 8, 9, 10\}$$

Definition 5: Der Raum $C_r(i)$

Sei für $0 \leq r < d_i$

$$C_r(i) = \{j \in C(j) : r_j = r\} \tag{2.1}$$

2.3 Rekurrenz und Transienz

Definition 6: Rekurrenz und Transienz

Einen Zustand i nennt man **rekurrent**, wenn man von jedem Zustand j , der von i aus erreicht werden kann, wieder zurück nach i gelangen kann. Andernfalls heißt i **transient**.

Anders ausgedrückt:

Ein Zustand i heißt **rekurrent**, wenn gilt:

$$P_i(X_n = i \text{ oft}) = 1$$

Andernfalls heißt i **transient**.

Beispiele

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ rekurrent

$\{7, 8, 9, 10\}$ transient

Kapitel 3

Die Erneuerungsgleichung

3.1 Das Rückkehrverhalten

Definition 7: Rückkehrverhalten

Sei für $n > 0$

$$f_{ij}^{(n)} = P_i(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j) \quad (3.1)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, bei Start in i , den Zustand j zum ersten Mal zur Zeit n zu besuchen. Und es sei $f_{ij}^{(0)} = 0$.

Satz 2:

Für homogene Markowsche Ketten gilt:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} \quad (3.2)$$

In Worten wird die Bedeutung des Satzes schnell klar:

Wenn man in i startet, muss man, um zur Zeit n in j zu sein, zu einem Zeitpunkt m mit $1 \leq m \leq n$ dort zum ersten Mal eingetroffen sein, und in den verbleibenden $n-m$ Schritten muss man von j nach j zurückgekehrt sein.

3.2 Die Erneuerungsgleichung

Wir betrachten wieder Gleichung 3.2 und setzen voraus, dass j rekurrent ist.

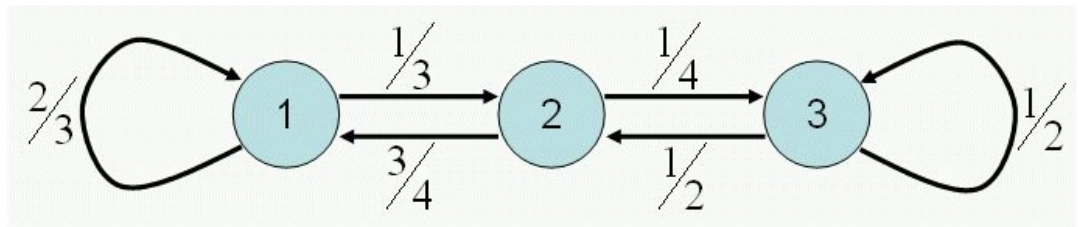
Setzt man nun in Gleichung 3.2 $i = j$ erhält man die **Erneuerungsgleichung**

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{m=1}^n f_{jj}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} \quad (3.3)$$

Die Erneuerungsgleichung werden wir an der folgenden Aufgabe erläutern:

Aufgabe 1:

Gegeben sei das folgende Übergangsdiagramm.



Übergangsdiagramm 3

Berechne mit Hilfe der Erneuerungsgleichung $p_{11}^{(3)}$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man nach 3 Schritten, wenn man im Zustand 1 gestartet ist, wieder im Zustand 1 endet.

Lösung

Nach der Erneuerungsgleichung gilt:

$$p_{11}^{(3)} = f_{11}^{(1)} \cdot p_{11}^{(2)} + f_{11}^{(2)} \cdot p_{11}^{(1)} + f_{11}^{(3)} \cdot p_{11}^{(0)}$$

also

$$p_{11}^{(3)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

Kapitel 4

Der Erneuerungssatz

Satz 3: Der Erneuerungssatz

Seien $p_{jj}^{(n)}$ und $f_{jj}^{(n)}$ wie in der Erneuerungsgleichung gegeben. Dann gilt:

$$R_j = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot f_{jj}^{(m)} \quad (4.1)$$

und R_j beschreibt die *Erwartung der Verteilung* von $f_{jj}^{(m)}$.

Ist $d_j = 1$, so konvergiert $p_{jj}^{(n)}$ gegen $\frac{1}{R_j}$.

Beweis

Schritt 1: Durch Induktion folgt aus (3.3) $0 \leq p_{jj}^{(n)} \leq 1$. Sei $\lambda = \limsup p_{jj}^{(n)}$ und (n_k) eine Folge mit $n_k \rightarrow \infty$ und $p_{jj}^{n_k} \rightarrow \lambda$.

Für alle $m \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_k p_{jj}^{(n_k)} = \lim \left(f_m p_{jj}^{(n_k-m)} + \sum_{1 \leq s \leq n_k, s \neq m} f_s p_{jj}^{(n_k-s)} \right) \\ &\leq \liminf_k (f_m p_{jj}^{(n_k-m)}) + \limsup_k \left(\sum \dots \right) \\ &\leq f_m \liminf_k p_{jj}^{(n_k-m)} + \sum_{s \neq m} f_s \limsup_k p_{jj}^{(n_k-s)} \leq f_m \liminf_k p_{jj}^{(n_k-s)} + (1 - f_m) \lambda. \end{aligned}$$

Ist $f_m > 0$, so folgt $\lambda \leq \liminf_k p_{jj}^{(n_k-m)}$ und damit

$$\lim_k p_{jj}^{(n_k-m)} = \lambda. \quad (4.2)$$

Wenden wir dieses Argument mehrfach an, so sehen wir, dass (4.2) für jedes m gilt, für das Zahlen m_1, \dots, m_k mit $m = m_1 + \dots + m_k$ und $f_m > 0$ existieren. Nun ist $d_f = 1$. Für hinreichend große Zahlen existiert immer ein m dieser Form. Es gibt also ein M derart, dass (4.2) für $m \geq M$ gilt.

Schritt 2: Für $n \geq 0$ sei

$$r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m.$$

Dann ist $r_0 = 1$ und

$$R_j = \sum_{m=1}^{\infty} m f_m = \sum_{m=1}^{\infty} f_m + \sum_{m=2}^{\infty} f_m + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} r_n.$$

Aus $r_m - r_{m-1} = -f_m$ und der Erneuerungsgleichung folgt

$$r_0 p_{jj}^{(n)} = p_{jj}^{(n)} = - \sum_{m=1}^n (r_m - r_{m-1}) p_{jj}^{(n-m)}$$

und indem man die negativen Terme nach links bringt,

$$r_0 p_{jj}^{(n)} + r_1 p_{jj}^{(n-1)} + \dots + r_n p_{jj}^{(0)} = r_0 p_{jj}^{(n-1)} + \dots + r_{n-1} p_{jj}^{(0)}.$$

Nennt man in dieser die linke Gleichung A_n , so ist die rechte A_{n-1} . Aus $A_0 = r_0 p_{jj}^{(0)}$ erhalten wir damit alle $n \geq 0$ $A_n = 1$, speziell

$$\sum_{v=0}^{n_k-M} r_v p_{jj}^{(n_k-M-v)} = 1. \quad (4.3)$$

Schritt 3: Nun zeigen wir $\lambda = 1/R_j$. Ist $R_j < \infty$, so existiert zu $\epsilon > 0$ ein \mathbf{N} mit $r_0 + r_1 + \dots + r_{\mathbf{N}} \geq R_j - \epsilon$. Ist k so groß, dass $n_k - M \geq \mathbf{N}$

gilt, so ist wegen (4.3)

$$1 \geq \sum_{v=0}^{n_k-M} r_v p_{jj}^{n_k-(M+v)}, \quad (4.4)$$

und nach (4.2) folgt $1 \geq \lambda(r_0 + \dots + r_{\mathbf{N}}) \geq \lambda(R_j - \epsilon)$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist $\lambda \leq 1/R_j$.

Andererseits ist wegen (4.3), $p_{jj}^{(n)} \leq 1$ und $(r_{\mathbf{N}+1} + r_{\mathbf{N}+2} + \dots) \leq \epsilon$

$$1 \leq \epsilon + \sum_{v=0}^{\mathbf{N}} r_v p_{jj}^{n_k-(M+v)}.$$

Durch Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ finden wir damit $1 \leq \epsilon + \lambda R_j$ und also $\lambda \geq 1/R_j$. Wir haben somit $\lambda = 1/R_j$ im Fall $R_j < \infty$ gezeigt.

Im Fall $R_j = \infty$ gibt es zu jedem $C > 0$ ein \mathbf{N} mit $r_0 + \dots + r_{\mathbf{N}} > C$. Durch einen Grenzübergang in (4.4) ergibt sich dann $1 \geq C\lambda$. Da C beliebig groß sein konnte, muss dann $\lambda = 0$ gelten.

Schritt 4: Im Fall $R_j = \infty$ ist der Beweis schon komplett. Im Fall $R_j < \infty$ muss noch $\liminf p_{jj}^{(n)} = 1/R_j$ gezeigt werden. Dies geht völlig analog. Man setzt $\lambda' = \liminf p_{jj}^{(n)}$, wählt eine Teilfolge (n_k) mit $p_{jj}^{(n_k)} \rightarrow \lambda'$ usw.

q.e.d.

4.1 Das Glühbirnenbeispiel

Die eigentliche Aussage des Erneuerungssatz erkennt man gut an dem folgenden Beispiel.

Beispiel 1: Das Glühbirnenbeispiel

Sei T_1 die Lebensdauer einer Glühbirne. In dem Moment, in dem sie durchbrennt, wird sie durch eine zweite Glühbirne erneuert. Diese hat dann die Lebensdauer T_2 usw. Die k -te Glühbirne muss also im Zeitpunkt $T_1 + T_2 + \dots + T_k$ erneuert werden.

$p_{EE}^{(n)}$ beschreibt dann die Wahrscheinlichkeit, dass gerade im Zeitpunkt

n eine Erneuerung stattfindet.

Wir suchen

- die mittlere Lebensdauer einer Glühbirne
- die Wahrscheinlichkeit, dass in einem beliebigen Zeitpunkt die Glühbirne erneuert wird

Bezogen auf den Erneuerungssatz beschreibt R_E die mittlere Lebensdauer einer Glühbirne.

Eine große Zahl n von Glühbirnen reicht etwa bis zum Zeitpunkt nR_E .

Auf den Zeitraum nR_E kommen also n Erneuerungen und damit gibt es im Mittel in jedem Zeitpunkt $1/R_E$ Erneuerungen, also

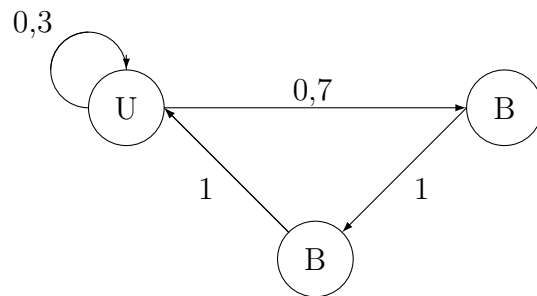
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_{EE}^{(n)}) = \frac{1}{R_E}$$

4.2 Der Teilchenzähler

Aufgabe 2: Der Teilchenzähler

Ein Teilchenzählgerät zum registrieren von Uranatomen zählt einen Ausschlag mit der Wahrscheinlichkeit von $p = 0,7$. Es ist blockiert, wenn in den letzten beiden Zeitintervallen ein Teilchen registriert wurde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Zählgerät unblockiert?

Lösung:



Übergangendiagramm 4

Da $d_U = 1$, gilt nach dem Erneuerungssatz:

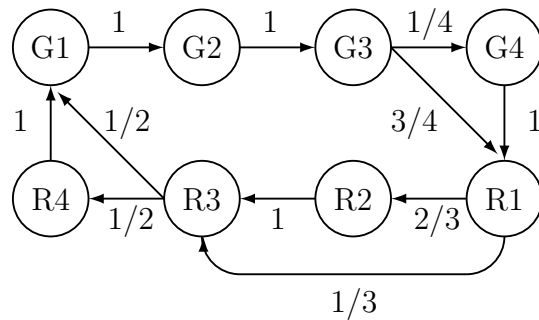
$$\begin{aligned}
 R_U &= \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot f_{UU}^{(m)} \\
 &= 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0,7 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + \dots \\
 &= 2,40
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{UU}^{(n)} = \frac{1}{2,40} \approx 41,67\%$$

4.3 Ampelphasen

Aufgabe 3: Ampelphasen

Gegeben ist das folgende Übergangendiagramm von Ampelphasen.



Übergangendiagramm 5

Alle 15 Sekunden erfolgt ein Übergang in den nächsten Zustand. D.h., sowohl grün als auch rot werden höchstens eine Minute lang angezeigt.

1. Berechne den Erwartungswert: Wie viele Sekunden nachdem die Ampel gerade grün geworden ist, schaltet sie wieder von rot auf grün?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schaltet die Ampel gerade zu dem Zeitpunkt von rot auf grün, an dem man vor ihr steht?

Lösung:

Da $d_{G1} = 1$, gilt der Erneuerungssatz.

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot f_{G1G1}^{(m)} &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \\
 &+ 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \\
 &+ 7 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\
 &+ 9 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + \dots \\
 &= 6 \frac{5}{12} \approx 6,41666
 \end{aligned}$$

Also:

1. Nach $6\frac{5}{12} \cdot 15$ Sekunden = 96,25 Sekunden erwarte ich, dass die Ampel wieder von rot auf grün umschaltet.
2. $\frac{1}{6\frac{5}{12}} \approx 0,1558$. Mit 15,58% Wahrscheinlichkeit schaltet die Ampel gerade von rot auf grün, wenn man vor ihr steht.

Kapitel 5

Anwendung auf Übergangswahrscheinlichkeiten

In den letzten Beispielen hatten wir immer eine Periode von 1. Wir können auch im rekurrenten Fall, bei dem die Periode ungleich 1 ist, mit den folgenden Hilfsmitteln eine Konvergenzaussage ableiten.

Sei zur Abkürzung

$$R_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

der Erwartungswert der ersten Rückkehrzeit nach i bei Start in i .

Satz 4:

Ist i rekurrent und $j \in C_r(i)$, der Raum $C_r(i)$ sei wie in 2.2 gegeben, so ist für $n \not\equiv r \pmod{d_i} p_{ij}^{(n)} = 0$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd_i+r)} = \frac{d_i}{R_{jj}} \tag{5.1}$$

Beweis: Auch hier verweisen wir für den Beweis auf Krenzel. §17, Satz 16.4, Seite 221.

5.1 Bestimmung der Grenzwerte von Ehrenfest's Modell

Da die Kette die Periode $d_i = 2$ hat, konvergieren laut Erneuerungssatz die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht. Satz 4 sagt uns, dass für den Fall, dass $|i - j|$ gerade ist, $p_{ij}^{(2n+1)} = 0$ und $p_{ij}^{(2n)} \rightarrow 2p_j$ gilt. Bei ungeradem $|i - j|$ gilt $p_{ij}^{(2n+1)} \rightarrow 2p_j$ und $p_{ij}^{(2n)} = 0$.

Zurück zu unserem Beispiel mit $N = 6$. Wir können uns den Vektor p_j durch kleine kombinatorische Überlegungen herleiten.

$$p_j = \frac{\binom{6}{j}}{2^6}$$

Mit diesen Werten ergibt sich folgender Wahrscheinlichkeitsvektor.

$$p = (0,015626; 0,09375; 0,234375; 0,3125; 0,234375; 0,09375; 0,015626)$$

Berechnet man $2p_j$, so erkennt man die Einträge in der Matrix $P^{(2n)}$, bzw. $P^{(2n+1)}$ wieder.

Kapitel 6

Anwendungen im Mathematikunterricht

6.1 Geschichtlicher Hintergrund zum Erneuerungssatz

In der Erneuerungstheorie studiert man Prozesse, die zu bestimmten zufälligen Zeiten gewissermaßen neu beginnen, unabhängig vom Verlauf vor diesen Zeitpunkten. Die Grundidee spielte schon in Arbeiten von Palm und Doeblin in den dreißiger und vierziger Jahren des 20. Jahrhunderts eine Rolle; der hier bewiesene Fall des Erneuerungssatzes geht auf die Arbeit von Erdős, Feller und Pollard aus dem Jahr 1943 zurück, kann aber auch auf frühere Resultate von Kolmogorow zurückgeführt werden.

6.2 Unser Fazit für den konkreten Einsatz im Mathematikunterricht

Der Einsatz dieses Themas im Mathematikunterricht scheint uns allerdings recht fraglich zu sein. Der Erneuerungssatz ist zwar *nur* die Berechnung einer Erwartungsverteilung, aber der Beweis des Satzes und die Interpretation der Ergebnisse sind allerdings sehr anspruchsvoll. Ebenso

die weitergehenden Sätze, die beispielsweise zur Lösung der Konvergenzfrage beim Ehrenfests Modell führen, sprengen unserer Meinung nach das, was man in der Schule zu leisten im Stande ist.

Kapitel 7

Literatur

Krengl, Ulrich: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik - 5., neubearbeitete und erweiterte Auflage. - Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 2000